

Vom Additionsverfahren zur Matrizenrechnung

Beispiel für das Additionsverfahren mit zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} 5x + 3y = 21 \\ 3x - 8y = -7 \end{array}$$

1. Multipliziere/dividiere die Gleichungen so, dass bei der Addition/Subtraktion eine Variable wegfällt.

$$\begin{array}{l|l} 5x + 3y = 21 & \cdot 3 \\ 3x - 8y = -7 & \cdot (-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15x + 9y = 63 \\ -15x + 40y = 35 \end{array}$$

$$49y = 98$$

2. Auflösen der Gleichung nach der verbleibenden Variablen $49y = 98 \mid :49 \rightarrow y = 2$

3. Einsetzen eine der beiden Gleichungen und Auflösen, um den Wert der anderen Variablen zu bekommen.

$$\begin{array}{l|l} 15x + 9(2) = 63 & \\ 15x + 18 = 63 & \mid -18 \\ 15x = 45 & \mid :15 \\ x = 3 & \end{array}$$

5. Lösung angeben: $L = \{(3 \mid 2)\}$

Nun das ganze mit drei Variablen:

$$\begin{array}{l|l} 2x + 3y + 5z = 8 & \mid \cdot 3 \\ x + y - 2z = 7 & \mid \cdot (-6) \\ 3x - y + z = 2 & \mid \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \\ -6x - 6y + 12z = -42 & \mid \text{II} + \text{I} \\ -6x + 2y - 2z = -4 & \mid \text{III} + \text{I} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \\ 0 + 3y + 27z = -18 & \mid \cdot 11 \\ 0 + 11y - 13z = 20 & \mid \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \\ 0 + 33y + 297z = -198 & \\ 0 - 33y - 39z = -60 & \mid \text{III} + \text{II} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \\ 0 + 33y + 297z = -198 & \\ 0 + 0 + 258z = -258 & \end{array}$$

$$\rightarrow 258z = -258 \mid :258 \rightarrow z = -1$$

$$\rightarrow 33y + 297 \cdot (-1) = -198 \rightarrow 33y - 297 = -198 \mid +297 \rightarrow 33y = 99 \rightarrow y = 3$$

$$\rightarrow 6x + 9 \cdot (3) + 15 \cdot (-1) = 24 \rightarrow 6x + 27 - 15 = 24 \mid -27 \mid +15 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Lösung: } L = \{(2 \mid 3 \mid -1)\}$$

Vom Additionsverfahren zur Matrizenrechnung

Beispiel für das Additionsverfahren mit zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{l|l} 5x + 3y = 21 & \\ 3x - 8y = -7 & \end{array}$$

1. Multipliziere/dividiere die Gleichungen so, dass bei der Addition/Subtraktion eine Variable wegfällt.

$$\begin{array}{l|l} 5x + 3y = 21 & \cdot 3 \\ 3x - 8y = -7 & \cdot (-5) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 15x + 9y & = & 63 \\ -15x + 40y & = & 35 \end{array}$$

$$49y = 98$$

2. Auflösen der Gleichung nach der verbleibenden Variablen $49y = 98 \mid :49 \rightarrow y = 2$

3. Einsetzen eine der beiden Gleichungen und Auflösen, um den Wert der anderen Variablen zu bekommen.

$$\begin{array}{l|l} 15x + 9(2) = 63 & \\ 15x + 18 = 63 & \mid -18 \\ 15x = 45 & \mid :15 \\ x = 3 & \end{array}$$

5. Lösung angeben: $L = \{(3 \mid 2)\}$

Nun das ganze mit drei Variablen:

$$\begin{array}{l|l} 2x + 3y + 5z = 8 & \mid \cdot 3 \\ x + y - 2z = 7 & \mid \cdot (-6) \\ 3x - y + z = 2 & \mid \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & | & 8 \\ 1 & 1 & -2 & | & 7 \\ 3 & -1 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot (-6) \\ \cdot (-2) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \mid \\ -6x - 6y + 12z = -42 & \mid II + I \\ -6x + 2y - 2z = -4 & \mid III + I \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 & | & 24 \\ -6 & -6 & 12 & | & -42 \\ -6 & 2 & -2 & | & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ II + I \\ III + I \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \mid \\ 0 + 3y + 27z = -18 & \mid \cdot 11 \\ 0 + 11y + 13z = 20 & \mid \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 & | & 24 \\ 0 & 3 & 27 & | & -18 \\ 0 & 11 & 13 & | & 20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot 11 \\ \cdot (-3) \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \mid \\ 0 + 33y + 297z = -198 & \mid \\ 0 - 33y - 39z = -60 & \mid III + II \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 & | & 24 \\ 0 & 33 & 297 & | & -198 \\ 0 & -33 & -39 & | & -60 \end{pmatrix} III + II$$

$$\begin{array}{l|l} 6x + 9y + 15z = 24 & \mid \\ 0 + 33y + 297z = -198 & \mid \\ 0 + 0 + 258z = -258 & \mid \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 & | & 24 \\ 0 & 33 & 297 & | & -198 \\ 0 & 0 & 258 & | & -258 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 258z = -258 \mid :258 \rightarrow z = -1$$

$$\rightarrow 33y + 297 \cdot (-1) = -198 \rightarrow 33y - 297 = -198 \mid +297 \rightarrow 33y = 99 \rightarrow y = 3$$

$$\rightarrow 6x + 9 \cdot (3) + 15 \cdot (-1) = 24 \rightarrow 6x + 27 - 15 = 24 \mid -27 \mid +15 \rightarrow 6x = 12 \rightarrow x = 2$$

$$\text{Lösung: } L = \{(2 \mid 3 \mid -1)\}$$

Weitere Gleichungssysteme zum Üben:

Gleichungssystem	Lösung
$x + y - z = 9$ $x + 2y - 4z = 15$ $x + 3y - 9z = 23$	$L = \{(5 3 -1)\}$
$3x + 2y + 3z = 110$ $5x + y - 4z = 0$ $2x - 3y + z = 0$	$L = \{(11 13 17)\}$
$x + 2y - z = 1,0$ $-x + y + 2z = 3,5$ $-2x - y + z = -0,5$	$L = \{(0,5 1,0 1,5)\}$
$x + y + 2z = 34$ $x + 2y + z = 33$ $2x + y + z = 32$	$L = \{(7,25 8,25 9,25)\}$
$x + y = 6 - z$ $-x - 3z = -7 - 2y$ $+2z = -3 + 4y + x$	$L = \{(3 1 2)\}$